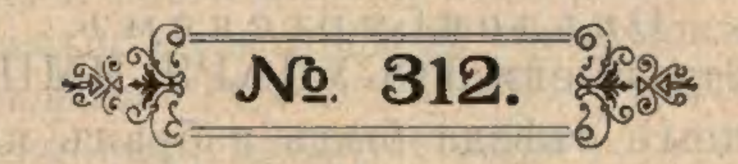
XXVI Сем. № 12.

Вѣстникъ Опытной Физики

и

Элементарной Математики.

31 Декабря



№ 312.

1901 г.

XI съѣздъ

Русскихъ Естествоиспытателей и Врачей

въ С.-Петербургѣ 20—30 декабря 1901 г.

Съ рѣдкимъ оживленіемъ прошелъ XI Съѣздъ Естествоиспытателей и Врачей. Нигдѣ, конечно, съѣздъ и не можетъ имѣть такого успѣха, какъ въ столицѣ. Огромное количество высшихъ учебныхъ и ученыхъ учрежденій сосредоточиваетъ въ Петербургѣ массу учебныхъ силъ, богатый учебно-вспомогательный матеріалъ, огромныя средства для экспериментальнаго изслѣдованія. Новые институты—химическій и физическій при Петербургскомъ университетѣ даютъ возможность демонстрировать физическіе и химическіе опыты предъ огромной аудиторіей. Естественно, что ни одинъ провинціальный университетъ не можетъ создать своимъ гостямъ такихъ благопріятныхъ условій для ознакомленія со всѣмъ, что дала наука за послѣдніе годы. Петербургъ и самъ манитъ къ себѣ всякаго провинціала. Неудивительно поэтому, что на столичный съѣздъ съѣхалось свыше $3^1/_2$ тысячъ человѣкъ. Моментъ открытія съѣзда представлялъ собой поистинѣ величественную картину. Множество представителей

учебнаго и ученаго міра, множество лицъ самыхъ разнообразныхъ профессій, имѣющихъ отношеніе къ точному знанію, заполнило огромный залъ собранія, слилось въ одну сплошную массу и встрѣтило долго не смолкавшими апплодисментами призывъ „къ дружной совмѣстной работѣ“.

Присутствуя на такомъ собраніи, ясно сознаешь, что самый фактъ хотя-бы временнаго объединенія такой массы людей, руководимыхъ общей идеей, уже производитъ ободряющее, освѣжающее дѣйствіе.

Съѣздъ былъ открытъ Почетнымъ Предсѣдателемъ XI-го съѣзда Его Высочествомъ Принцемъ Александромъ Петровичемъ Ольденбургскимъ, привѣтствовавшимъ членовъ съѣзда отъ имени ГОСУДАРЯ ИМПЕРАТОРА.

Предсѣдателемъ съѣзда былъ избранъ предсѣдатель распорядительнаго комитета проф. Н. А. Меншуткинъ,—вице-предсѣдателями профессора Н. А. Умовъ (Московск. Ун.) и И. М. Догель (Казанск. Ун.).

Нѣкоторые славянскіе университеты прислали на съѣздъ своихъ представителей. Отъ имени Пражскаго университета привѣтствовалъ членовъ съѣзда проф. Браунеръ, а отъ Краковскаго Университета проф. Вихеркевичъ.

Распорядительный Комитетъ употребилъ всѣ усилія къ тому, чтобы дать гостямъ возможность съ наибольшей пользой провести немногіе дни ихъ пребыванія въ столицѣ. По приглашенію Комитета всѣ ученыя и высшія учебныя учрежденія столицы, многіе правительственныя и частныя учрежденія открыли членамъ широкій доступъ. Вездѣ производились демонстраціи, давались объясненія, дѣлались опыты. Университетъ въ буквальномъ смыслѣ слова превратился въ эти дни въ блестящую выставку научныхъ приборовъ, коллекцій, учебно-вспомогательныхъ пособій.

Секція физики отличалась особеннымъ оживленіемъ. Огромная аудиторія физическаго института далеко не вмѣщала всѣхъ посѣтителей. Занятія въ физическомъ институтѣ шли непрерывно съ ранняго утра до поздняго вечера. Секціонныя засѣданія смѣнялись демонстраціями приборовъ, опытами.

Секція чистой математики и механики, конечно, была далеко не такъ многолюдна; но все же отведенная ей аудиторія часто не вмѣщала посѣтителей и, многимъ приходилось стоять; и она превзошла слѣдовательно ожиданія Распорядительнаго Комитета.

Мы ограничимся здѣсь этими строками. Сколько нибудь обстоятельный обзоръ того, что происходило, что было сдѣлано на съѣздѣ, не можетъ быть, конечно, произведенъ такъ скоро. Мы этимъ займемся въ слѣдующихъ номерахъ нашего журнала, распредѣливъ матеріалъ по отдѣламъ.

Новѣйшіе успѣхи въ области телеграфированія безъ проводовъ.

Докладъ, читанный профессоромъ Шарлотенбургскаго Политехникума **A. Slaby**, на XLII съѣздѣ нѣмецкихъ инженеровъ въ Килѣ.

Переводъ Д. Шора.

Окончаніе *).

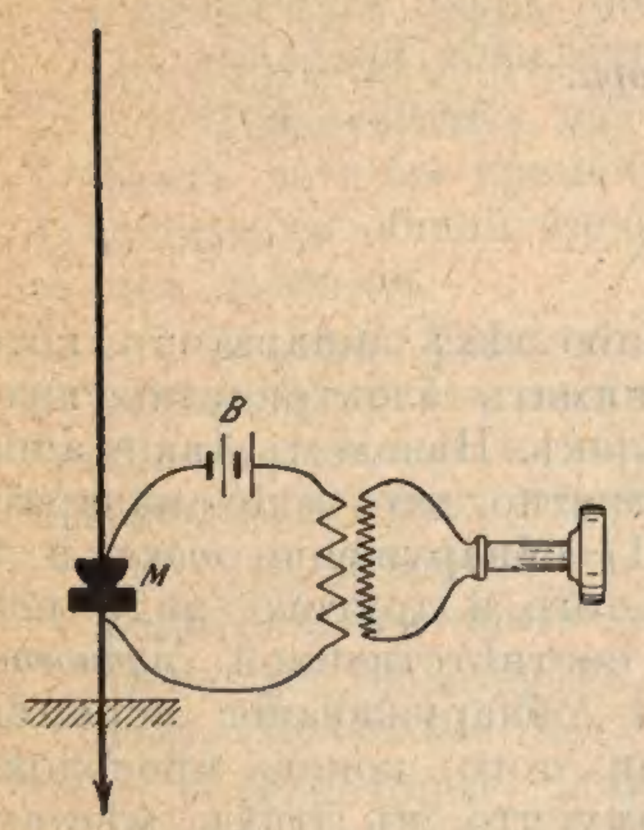
Перейдемъ теперь къ разсмотрѣнію тѣхъ аппаратовъ, которые даютъ намъ возможность воспринимать электрическія явленія, индуцируемыя во вторичной проволокѣ. Назовемъ такіе аппараты „*индикаторами*“. Само собой понятно, что такіе аппараты могутъ преслѣдовать двоякую цѣль: 1) обнаруженіе *тока* и 2) *электрическаго напряженія*. Индикаторы того и другого вида слѣдуетъ, понятно, помѣщать въ мѣстѣ соотвѣтственной *пучности*. Такъ что индикаторы, служащіе для обнаруживанія перемѣнныхъ токовъ вводятся въ цѣпь вблизи того конца проволоки, который соединяется съ землей; потому что въ этихъ мѣстахъ колебанія тока имѣютъ пучность (см. фиг. 7, стр. 209). Напротивъ того индикаторы для обнаруживанія электрическаго напряженія слѣдуетъ помѣщать по возможности вблизи свободнаго конца вторичной проволоки. Нѣтъ нужды упоминать о томъ, что эти аппараты должны быть въ высшей степени чувствительны и точны.

Сперва я въ немногихъ словахъ опишу *индикаторы*, служащіе для обнаруживанія тока. Хотя телефонъ и отличается своею чувствительностью по отношенію къ току, но примѣнить его въ данномъ случаѣ непосредственно нельзя; если ввести катушку телефона въ цѣпь, то сильная самоиндукція ея уничтожитъ дѣйствіе токовъ. Но зато, если присоединить къ телефону микрофонъ, то получается необходимый для нашей цѣли аппаратъ (см. фиг. 10). Контактъ *M* микрофона не представляетъ большого сопротивленія для тока; поэтому, если мы введемъ микрофонъ въ цѣпь внизу проволоки тамъ, гдѣ она соединяется съ землею, то электрическія колебанія не измѣняются. Мы вводимъ этотъ микрофонъ сверхъ того въ цѣпь, по которой протекаетъ токъ изъ батареи *B*; слабые перемѣнные токи, возникающіе во время телеграфированія во вторичной проволокѣ, вызываютъ колебанія этого тока, подобно тому, какъ прикосновенія крыла бабочки или перышка птицы вызываетъ на поверхности пруда легкое волненіе. Если теперь преобразовать эти колебанія въ индукціонной катушкѣ, то ихъ нетрудно обнаружить при помощи телефона. Правда, колебанія телефона не соотвѣтствуютъ по числу коле-

---

*) См. № 309 „Вѣстника“.

баніямъ тока въ проводникѣ—наше ухо, какъ извѣстно, воспринимаетъ колебанія, число которыхъ въ секунду maximum доходитъ до 40000; между тѣмъ нашъ токъ даетъ милліоны колебаній въ секунду. Тонъ, издаваемый телефономъ, соотвѣтствуетъ первымъ толчкамъ каждой серіи волнъ, вызываемой искрой; такъ что число колебаній этого тока соотвѣтствуетъ перерывамъ тока въ первичной катушкѣ индукціоннаго аппарата.



Фиг. 10.

Этотъ аппаратъ самый чувствительный для воспріятія электрическихъ колебаній. Между кораблестроительнымъ депо (Krafthaus Schiffbauerdamm) въ Берлинѣ и Кабельной Мастерской Обершпре (Kabelwerk Oberspree), отдаленными другъ отъ друга на 14 km. (считая по прямой линіи черезъ воздухъ), можно было вполнѣ ясно телеграфировать при помощи микрофона и проволоки длиною въ 12 m. Необходимо принять во вниманіе, что эти двѣ станціи отдѣлены другъ отъ друга Берлиномъ на максимальномъ его протяженіи и лежатъ въ тѣни большихъ зданій.

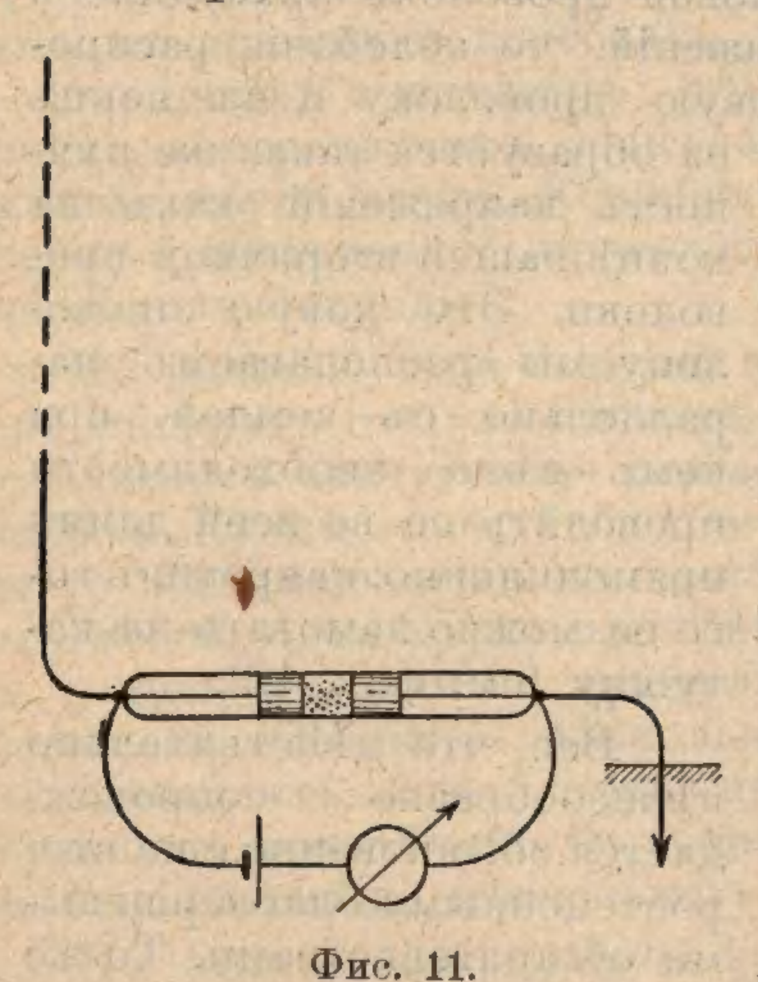
Но микрофонъ замѣчателенъ не только, какъ самый чувствительный аппаратъ, служащій для воспріятія колебаній тока, онъ интересенъ и въ историческомъ отношеніи — при помощи него было впервые наблюдаемо явленіе передачи электрическихъ колебаній на разстояніе. Изобрѣтатель микрофона профессоръ *Hughes*, разсказываетъ, что еще въ семидесятыхъ годахъ ему удалось наблюдать интересующее насъ явленіе; онъ шелъ вдоль улицы, на которой находился его домъ, и ясно слышалъ при помощи микрофона находившагося въ его рукахъ, перемѣнные токи помѣщавшейся внутри его квартиры индукціонной катушки. Но вслѣдствіе странной случайности ему не суждено было изслѣдовать это явленіе подробнѣе. Его ученые друзья, которыхъ онъ пригласилъ къ себѣ, чтобы показать имъ свой опытъ, хотя и убѣдились въ справедливости его, но сочли объясненіе, которое *Hughes* далъ этому явленію, столь абсурднымъ, что отсовѣтовали ему сдѣлать на эту тему сообщеніе въ Королевскомъ Обществѣ; они боялись, что его научное реномэ пострадаетъ отъ этого, а между тѣмъ *Hughes* совершенно правильно понялъ это явленіе, онъ сводилъ его на дѣйствіе электрическихъ лучей, исходящихъ изъ искры. Въ этомъ случаѣ не въ первый разъ въ исторіи науки духъ корпоративности среди ученыхъ является злѣйшимъ врагомъ науки.

Но, къ сожалѣнію, примѣненіе микрофона не всегда цѣлесообразно. Хотя слабые перемѣнные токи, воспринимаемые имъ, и слышны въ телефонѣ, но мы не въ состояніи автоматически

записывать телеграфируемые знаки Морзе. Въ большинствѣ же случаевъ задача техники именно въ этомъ и состоитъ.

Послѣднему требованію удовлетворяютъ *индикаторы* второго типа, служащіе для воспринятія *напряженія* электрическихъ колебаній. Объ одномъ механизмѣ такого типа мы уже упоминали выше при опытѣ, описанномъ на стр. 193. Въ мѣстѣ пучности электрическихъ колебаній мы устанавливали при помощи пучка искръ разрядъ электрическаго тока и приводили въ дѣйствіе при помощи этого запасъ электрической энергіи; такимъ образомъ мы могли значительно усиливать сигнализированіе электрическихъ колебаній во второй проволокѣ. При небольшомъ разстояніи, имѣвшемъ мѣсто въ нашемъ опытѣ, мы получали искры длиною въ нѣсколько миллиметровъ, и сравнительно простыми и грубыми средствами мы были въ состояніи усилить это дѣйствіе такъ, что сигналы можно было видѣть на значительномъ разстояніи. При разстояніи 100 km. и больше искры, получаемыя въ пучности электрическаго напряженія, въ милліоны разъ меньше; соотвѣтственно этому и аппараты должны быть значительно чувствительнѣе.

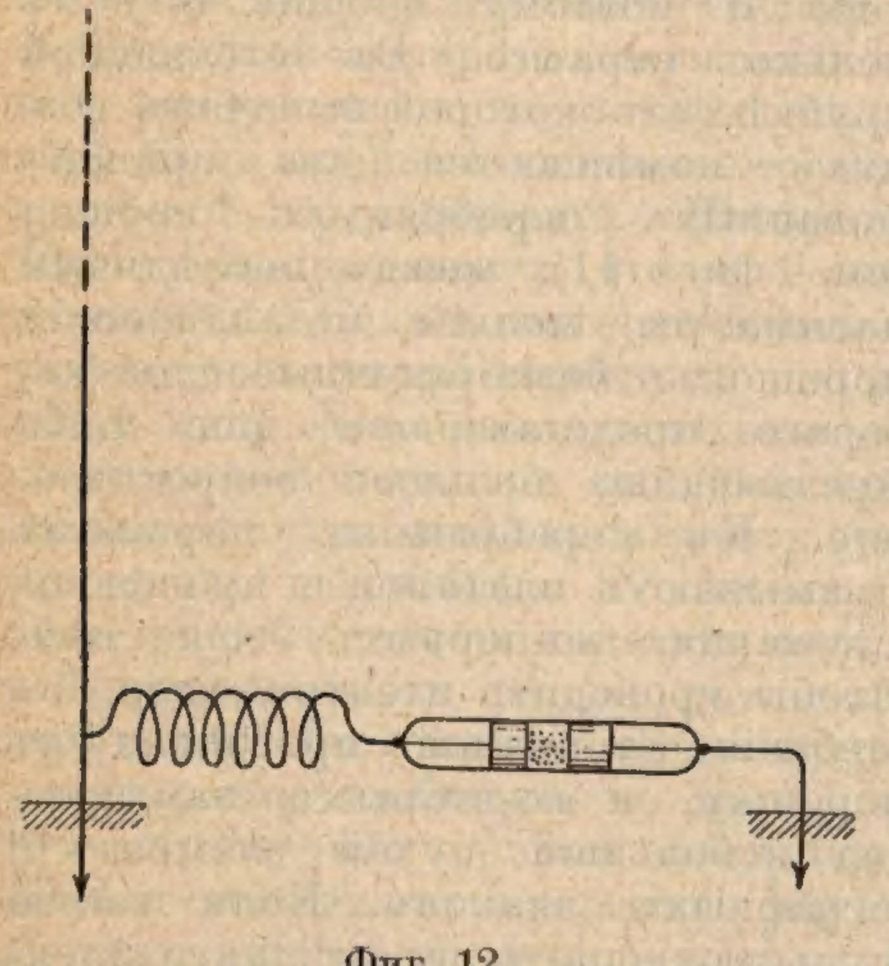
Телеграфированіе безъ проводовъ, въ его современомъ видѣ, было невыполнимо пока не изобрѣли очень чувствительный *индикаторъ*, называемый по имени изобрѣтателя Branly'евой трубкой, или фриттеромъ. Я предполагаю, что настоящее собраніе въ общемъ знакомо съ дѣйствіемъ фриттера и поэтому сообщу о немъ только вкратцѣ. Въ стеклянной трубкѣ, изъ которой выкачанъ воздухъ, помѣщаются два пришлифованныхъ серебряныхъ поршня (см. фиг. 11); между послѣдними насыпается мелкій металлическій порошокъ, безпорядочные слои котораго представляютъ для тока чрезвычайно большое сопротивленіе. Къ серебрянымъ поршнямъ примыкаютъ платиновыя проволоки, служащія, во-первыхъ, для того, чтобы проводить электрическія колебанія вторичной проволоки къ порошку, и во-вторыхъ, замыкающія цѣпь, въ которой находится небольшой сухой элементъ и аппаратъ для записыванія телеграфныхъ знаковъ. Если такую трубку подвергнуть дѣйствію пульсирующаго перемѣннаго электрическаго напряженія, то между частичками металла, заключеннаго въ трубку, проскакиваютъ мельчайшія искры; эти искры замыкаютъ нашу цѣпь и аппаратъ записываетъ телеграфный знакъ. При этомъ между частичками металла устанавливаются свободные пути для электричества. Но достаточно небольшого



Фиг. 11.

удара молоточка, чтобы эти пути распались и чтобъ снова возстановилось громадное сопротивленіе, которымъ трубка обладала сначала. Такимъ образомъ, давая болѣе или менѣе продолжительные сигналы, мы получаемъ возможность воспроизвести весь алфавитъ Морзе.

Какъ сказано выше, фриттеръ отвѣчаетъ только на дѣйствіе электрическаго напряженія; поэтому его слѣдуетъ помѣщать по-возможности близко къ мѣсту пучности напряженій. Припомнимъ теперь, какъ распредѣлялось перемѣнное напряженіе въ нашей вторичной проволокѣ (см. фиг. 9, стр. 213). Чтобы получить по возможности сильное дѣйствіе, мы соединяли нашу вторичную проволоку (равно какъ и первичную) съ землей (на фиг. 9 *AB*— первичная, *GF* — вторичная проволока). Въ такомъ случаѣ пучность электрическихъ напряженій образовывалась у конца проволоки; конецъ же этотъ намъ недоступенъ. Лишь послѣ продолжительныхъ поисковъ удалось придумать очень простое средство для того, чтобы получить пучность напряженій не на недоступной высотѣ, а у самой земли. Указаніе въ этомъ вопросѣ даетъ намъ вышеописанный опытъ съ колеблющимися желѣзными полосами (стр. 212, фиг. 8). Если соединить нашу вторичную проволоку съ новою проволокою, соотвѣтствующей тому же числу колебаній такъ, чтобы начало этой новой проволоки приходилось въ мѣстѣ узла электрическихъ напряженій, то колебанія распространяются черезъ узелъ на эту новую проволоку и на концѣ ея образуется такая же пучность напряженій, какъ на концѣ нашей вторичной проволоки. Эту новую проволоку мы располагаемъ параллельно съ землей, причемъ нѣтъ необходимости проводить ее во всей длинѣ прямолинейно: напротивъ того ее можно намотать на катушку (см. фиг. 12).



Фиг. 12.

Все, что дѣйствительно цѣлесообразно, сопровождается обыкновенно еще второстепенными благопріятными обстоятельствами. То же мы замѣчаемъ и въ данномъ случаѣ. Такъ какъ наша вертикальная проволока, служащая для воспринятія колебаній, отведена въ землю, то фриттеръ, помѣщающійся въ сторонѣ, не подверженъ дѣйствію случайныхъ постороннихъ токовъ. До тѣхъ поръ, пока не придумали этого послѣдняго пріема, электрическіе разряды атмосферы служили серьезною помѣхою при телеграфированіи. Какъ извѣстно, въ верхнихъ слояхъ атмосферы господ-

ствуютъ, вообще говоря, другія электрическія напряженія, чѣмъ у поверхности земли; кромѣ того, эти напряженія подвержены постояннымъ колебаніямъ, въ особенности въ жаркіе дни. Въ прежнее время телеграммы, посылаемыя безъ помощи проводовъ, бывали постоянно перепутаны съ безпрерывной болтовней атмосферы. Это препятствіе нынѣ совершенно устранено; и притомъ нашъ аппаратъ въ такой мѣрѣ не зависитъ отъ атмосфернаго электричества, что въ самую сильную грозу можно безошибочно телеграфировать, что доказали многочисленные опыты, произведенные въ Берлинѣ. Приближающаяся гроза, громъ, которой мы теперь слышимъ, даетъ намъ случай показать, что наши аппараты совершенно не зависятъ отъ постороннихъ электрическихъ разрядовъ.

При употребленіи боковой проволоки нашъ аппаратъ также защищенъ отъ дѣйствія постороннихъ электрическихъ импульсовъ, число колебаній которыхъ не соотвѣтствуетъ нашей проволокѣ. Конечно, при этомъ предполагается, что аппаратъ, изъ котораго исходятъ эти постороннія колебанія, не слишкомъ близокъ и интенсивность колебаній не очень велика,—такъ какъ въ такомъ случаѣ нашъ пріемникъ далъ бы слабыя колебанія, подъ дѣйствіемъ перваго толчка электрическихъ волнъ искры. При бо́льшихъ разстояніяхъ эти толчки столь незначительны, что ихъ нѣтъ возможности обнаружить; и волны только тогда вызываютъ въ пріемникѣ колебанія, когда ихъ періодъ совпадаетъ съ періодомъ, присущимъ его проволокѣ, т. е. когда слабые толчки электрическихъ волнъ могутъ постепенно складываться, усиливая другъ друга. Конечно, то, что я обозначаю при этомъ словомъ „постепенно" происходитъ въ теченіи части десятитысячной доли секунды.

Но введеніе этой боковой проволоки не только *предохраняетъ* нашъ аппаратъ отъ воздѣйствія постороннихъ колебаній, но и увеличиваетъ значительно *разстояніе, на которомъ можно передавать колебанія*. Кромѣ того, большое практическое значеніе имѣетъ еще то обстоятельство, что пользуясь вышеописаннымъ приборомъ, можно безъ труда примѣнять громоотводы, желѣзныя мачты и т. п. для отправки и принятія телеграммъ. О такого рода опытахъ я сообщалъ нѣсколько времени тому назадъ, и на опытѣ показалъ тогда, какъ производится приведенія соотвѣтствующихъ аппаратовъ къ одному періоду колебаній и одновременная посылка нѣсколькихъ телеграммъ.

Но этимъ еще далеко не исчерпываются средства для усовершенствованія телеграфированія безъ проводовъ. Если мы зададимся вопросомъ о томъ, какъ можно усовершенствовать нашъ пріемникъ, не уменьшая достовѣрности даваемыхъ имъ знаковъ, то наше вниманіе прежде всего обратится на фриттеръ. Между тѣмъ опытъ многихъ лѣтъ доказалъ мнѣ, что всѣ усилія, направленныя къ тому, чтобы увеличить чувствительность фриттера, напрасны. Хотя возможно, собственно говоря, сдѣлать

фриттеръ болѣе чувствительнымъ, пользуясь болѣе мелкимъ порошкомъ и примѣшивая больше серебра, но при этомъ не такъ хорошо возстановляется большее сопротивленіе. Если же фриттеръ отъ легкаго толчка молоточка не принимаетъ немедленно первоначальнаго громаднаго сопротивленія, то онъ не имѣетъ для практики никакой цѣны. Между тѣмъ достовѣрность знаковъ, даваемыхъ телеграфомъ, имѣетъ болѣе важное значеніе, чѣмъ величина разстоянія, на которомъ можно телеграфировать; если этой достовѣрности нѣтъ, то на сигналы нашего аппарата нельзя полагаться. По этой причинѣ въ настоящее время приходится довольствоваться лишь небольшою чувствительностью фриттера.

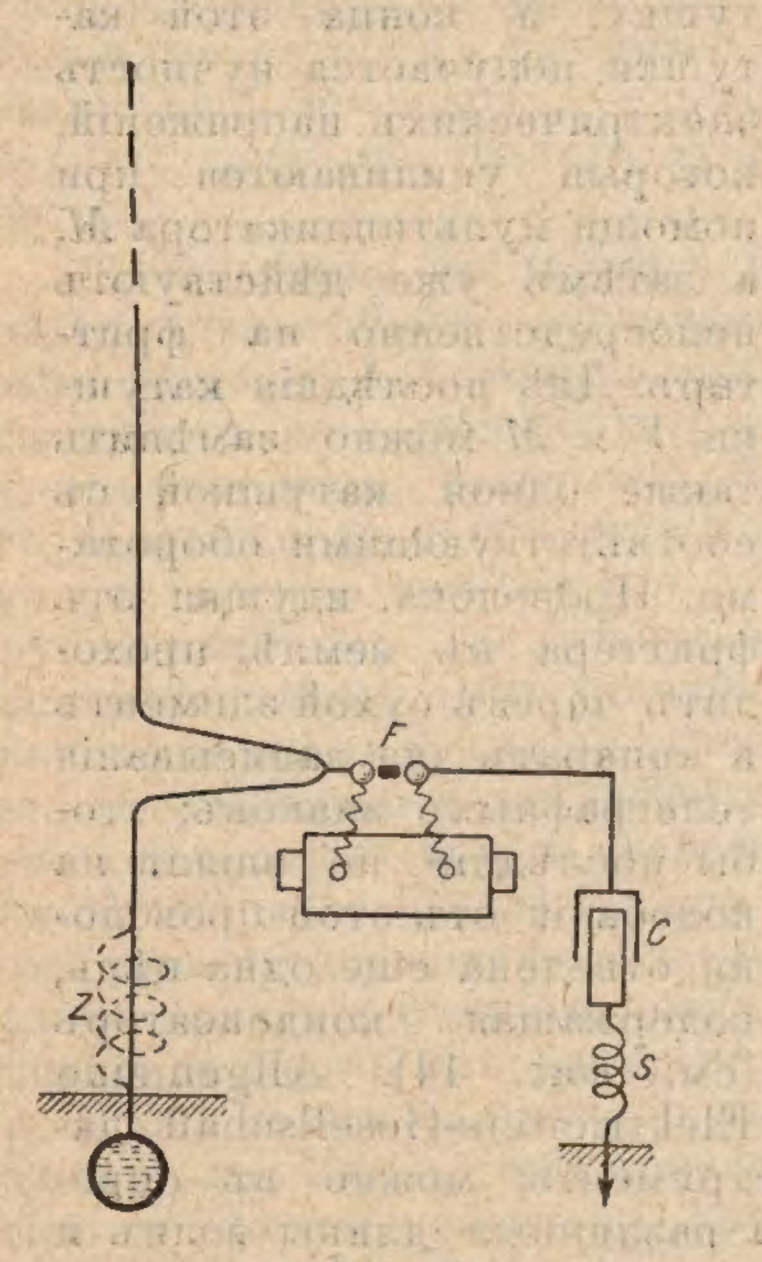
Но усовершенствованіе возможно зато въ другомъ направленіи. Телеграфированіе безъ проводовъ представляетъ собою родъ *передачи энергіи*, и лишь опредѣленная доля энергіи воспринимается вторично проволокою. Энергія же опредѣляется силой тока и его напряженіемъ; а такъ какъ фриттеръ отвѣчаетъ исключительно на электрическое напряженіе, то слѣдуетъ стремиться по возможности увеличить напряженіе даннаго количества электрической энергіи насчетъ силы тока. *Marconi* удалось недавно съ успѣхомъ примѣнить для этой цѣли по примѣру *Lodge'a*, принципъ трансформатора.—Но другое средство даетъ возможность достигнуть еще лучшихъ результатовъ. Для поясненія я позволю себѣ привести аналогію изъ акустики. Если я прикоснусь молоткомъ къ этому камертону, то послѣдній начнетъ колебаться. Звукъ, издаваемый при этомъ, очень слабъ, но если помѣстить камертонъ на соотвѣтствующій резонаторъ, то сила этого звука немедленно усиливается до порядочныхъ размѣровъ. Подобное же явленіе резонанса мы можемъ получить и для электрическихъ колебаній. Каждому электротехнику извѣстенъ такъ называемый *эффектъ Ferranti*. Если соединить зажимы электрической машины перемѣннаго тока съ обоими проводниками открытаго кабеля, то можно выбрать отношеніе электрическихъ величинъ такъ, что напряженіе электричества достигнетъ у концовъ кабеля значительныхъ размѣровъ, превосходящихъ напряженіе машины во много разъ. Для этого необходимо только такъ выбрать электрическіе размѣры кабеля, т. е. сопротивленіе, емкость и самоиндукцію, чтобы присущее ему число колебаній согласовалось съ числомъ колебаній, произведенныхъ машиною. Т. е. кабель долженъ быть „настроенъ“ (заимствуя это выраженіе изъ акустики) въ унисонъ съ колебаніями перемѣннаго тока машины.

Если соединить проволоку, въ которой происходятъ быстрыя электрическія колебанія, съ катушкою, настроенной въ унисонъ съ проволокой, и если эта катушка обладаетъ большой самоиндукціей, при незначительной емкости, — то на свободномъ концѣ катушки получается значительно бо́льшее напряженіе. Энергія колебаній какъ бы перенесена на резонаторъ, колебанія котораго сильнѣе; первоначальное напряженіе какъ бы умно-

жается на счетъ силы тока; поэтому то я и предложилъ назвать этотъ аппаратъ *мультипликаторомъ*. Съ трансформаторами онъ не имѣетъ ничего общаго, такъ какъ въ этихъ аппаратахъ имѣются всегда двѣ отдѣльныя электрическія цѣпи, равно какъ и въ аутотрансформаторахъ, или въ такъ называемыхъ шпартрансформаторахъ. Въ мультипликаторѣ же напротивъ того мы имѣемъ дѣло съ одною только цѣпью; въ катушку съ одного ея конца, вводится электрическая энергія низкаго напряженія, на другомъ же концѣ получается энергія высокаго напряженія. При помощи слѣдующихъ опытовъ вы, пожалуй, лучше поймете дѣйствіе этого аппарата, чѣмъ этого можно достигнуть при помощи описанія.

(Рядъ соотвѣственнымъ образомъ настроенныхъ мультипликаторовъ, примыкающихъ одновременно къ одной и той же цѣпи приходятъ одинъ за другимъ въ дѣйствіе, въ зависимости отъ того, каково число колебаній тока; послѣднее мѣняется при помощи перемѣнной самоиндукціи. При этомъ получается сильное электрическое свѣченіе).

Изложенные факты представляютъ собою научныя основанія безпроволочной телеграфіи, которыя явились результатомъ продолжительныхъ изслѣдованій и съ полъ года тому назадъ стали доступны всѣмъ. Allgemeine Elektricitäts-Gesellschaft подъ управленіемъ графа *von Arco* примѣнило эти принципы для устройства многочисленныхъ аппаратовъ для телеграфированія безъ проводовъ. Нѣтъ возможности въ настоящей рѣчи описать всѣ эти приспособленія; поэтому я ограничусь описаніемъ одного такого аппарата, а именно новѣйшаго. Его дѣйствіе должно быть вполнѣ понятно послѣ того, что было сказано.

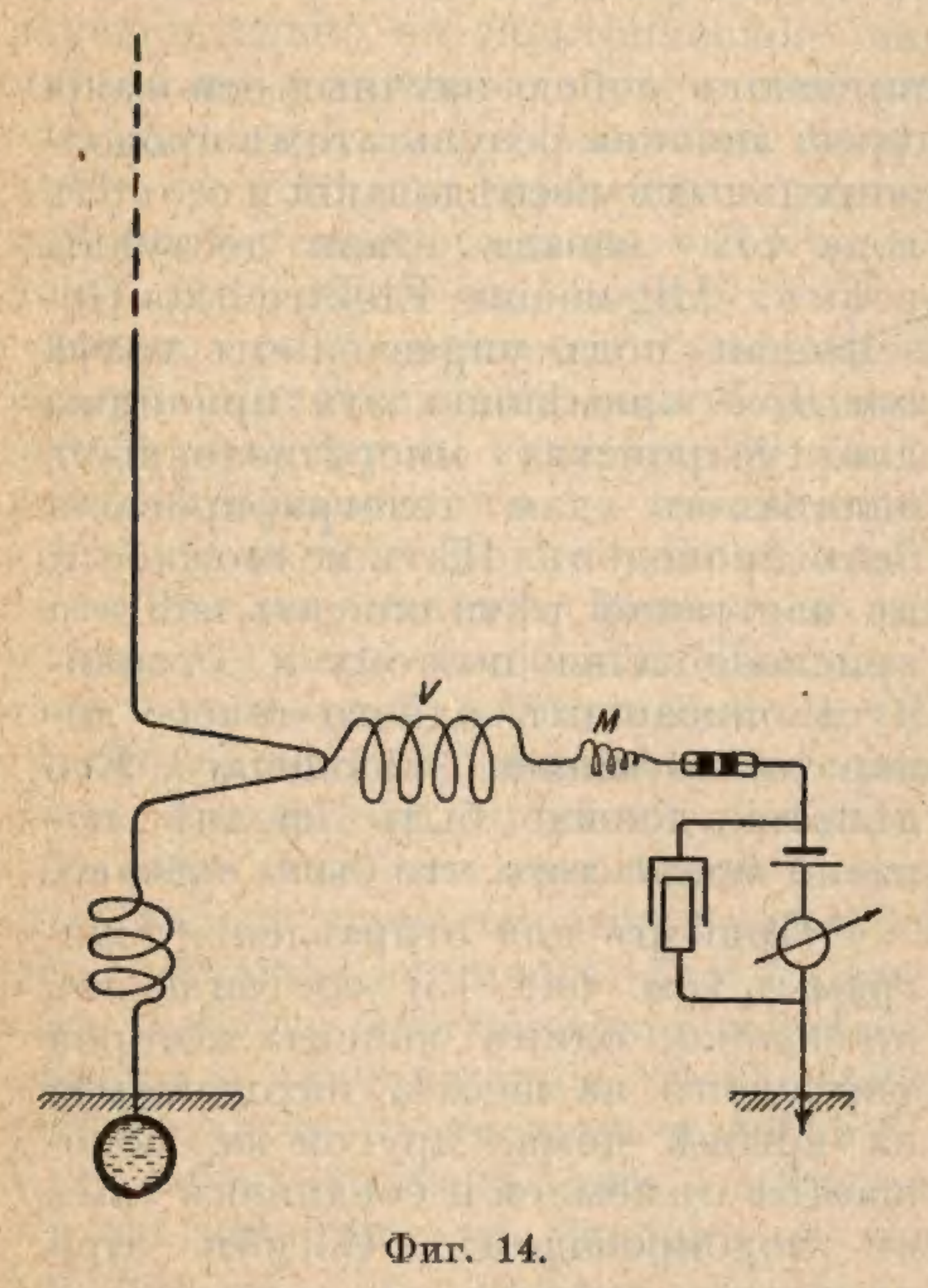


Фиг. 13.

Приборъ для отправленія телеграммъ (см. фиг. 13) состоитъ изъ проволоки, одинъ конецъ которой укрѣпленъ на шестѣ, находящемся на крышѣ дома, другой же сообщается съ землей и соединенъ тамъ съ водопроводомъ. Изгибъ этой проволоки введенъ въ залу черезъ окно и при F получаетъ изъ искры индукціоннаго аппарата перемѣнный токъ. Послѣднее достигается при помощи конденсатора C соотвѣтствующей емкости, черезъ который проволока соединяется съ землей. Подобно тому, какъ, ударяя желѣзную полосу, мы приводили ее въ колебанія

(см. стр. 212, фиг. 8), электрическая искра вызываетъ колебанія въ нашей проволокѣ; длина волны этихъ колебаній соотвѣтствуетъ учетверенной длинѣ проволоки. Чтобы увеличить ее достаточно ввести въ нашу проволоку отведенную къ землѣ катушку *Z*, изображенную на чертежѣ пунктиромъ; эта катушка соотвѣтствуетъ опредѣленной длинѣ проволоки, на которую мы увеличили четверть длины волны. Здѣсь къ нашимъ услугамъ цѣлый рядъ такихъ катушекъ. Но, пользуясь каждой такой катушкой, мы должны соотвѣтственнымъ образомъ настроить колебанія замкнутой черезъ землю цѣпи съ колебаніями присущими самой проволокѣ. Этого достигаютъ мѣняя самоиндукцію катушки *S* или перемѣщая конденсаторъ *C*, которые для этой цѣли снабжены заранѣе отмѣренными мѣтками.

Аппаратъ для воспринятія колебаній (см. фиг. 14) состоитъ изъ такой же точно проволоки, какъ и только что описанный приборъ; къ изгибу этой проволоки примыкаетъ проволока *V*, соотвѣтственной длины, закрученная въ катушку. У конца этой катушки получается пучность электрическихъ напряженій, которыя усиливаются при помощи мультипликатора *M*, а затѣмъ уже дѣйствуютъ непосредственно на фриттеръ. Двѣ послѣднія катушки *V* и *M* можно замѣнить также одной катушкой съ соотвѣтствующими оборотами. Проволока, идущая отъ фриттера къ землѣ, проходитъ черезъ сухой элементъ и аппаратъ для записыванія телеграфныхъ знаковъ; чтобы послѣдніе не вліяли на колебанія отъ этой проволоки отведена еще одна цѣпь, содержащая конденсаторъ (см. фиг. 14). Allgemeine Elektricitäts-Gesellschaft даетъ гарантію въ томъ, что эти инструменты можно въ опредѣленныхъ границахъ настраивать на различныя длины волнъ и телеграфировать при ихъ помощи на разстояніи въ 100 km. черезъ поверхность моря, если мачта достигаетъ высоты въ 50 m. По окончаніи этой рѣчи графъ *von Arco* будетъ такъ любезенъ показать намъ рядъ опытовъ; онъ обмѣняется телеграммами между кораблями, стоящими въ гавани, а также пошлетъ телеграмму на береговую станцію Bülk.



Фиг. 14.

Какъ вы видите изъ вышеизложеннаго, безпроволочная телеграфія уже прошла ту стадію развитія, при которой изслѣдованіе идетъ ощупью; она примкнула теперь къ сознательной технической дѣятельности и бодрыя силы индустріи скоро расширятъ область ея примѣненія. Но прежде всего безпроволочный телеграфъ найдетъ самое широкое примѣненіе тамъ, гдѣ жизнь и благосостояніе человѣка подвергаются наибольшей опасности, т. е. у береговъ и въ открытомъ морѣ. Я полагаю, что не такъ далеко то время, когда на каждомъ большомъ суднѣ будетъ находиться этотъ простой и необходимый аппаратъ.

Но этимъ еще не ограничивается область примѣненія безпроволочнаго телеграфа: во многихъ случаяхъ онъ замѣнитъ подводные кабели, хотя, правда, не слѣдуетъ питать особенно большихъ надеждъ въ этомъ отношеніи. Не трудно въ настоящее время разсчитать, гдѣ лежитъ въ этомъ отношеніи граница. Если принять во вниманіе, что мечты о томъ, чтобы поднимать проволоку при помощи баллона на высоту въ 1000 m., имѣютъ смыслъ только при отдѣльныхъ опытахъ, а не для постояннаго телеграфированія, то нѣтъ основаній надѣяться увеличить разстояніе, на которомъ возможно точное и достовѣрное телеграфированіе безъ проводовъ, больше чѣмъ на нѣсколько сотъ километровъ, даже при самомъ лучшемъ усовершенствованіи инструментовъ.

Точно также мы можемъ теперь предвидѣть, какимъ путемъ пойдетъ дальнѣйшее усовершенствованіе безпроволочнаго телеграфа. Законы, изложенные мною въ началѣ настоящаго доклада, указываютъ на зависимость разстоянія, на которомъ возможно телеграфированіе, главнымъ образомъ отъ трехъ факторовъ: 1) отъ длины параллельно расположенныхъ проводовъ, 2) отъ числа пульсирующихъ колебаній и 3) отъ средняго значенія силы тока. Трудно надѣяться на существенное увеличеніе первыхъ двухъ факторовъ; кромѣ того удлиненіе проволокъ обусловливаетъ возникновеніе волнъ бóльшей длины, число колебаній которыхъ слѣдовательно меньше; и это остается въ силѣ, пока не будетъ изобрѣтено совершенно новое средство, дающее возможность сдѣлать длину волны независимою отъ длины проволоки. Такимъ образомъ для усовершенствованія безпроволочнаго телеграфа остается только усиленіе индуцируемыхъ токовъ. Сила же тока, какъ извѣстно, зависитъ отъ двухъ величинъ: отъ электрической емкости проволоки и отъ напряженія зарядовъ. Но чѣмъ выше мы проводимъ проволоку, тѣмъ меньше становится емкость отдаленныхъ отъ земли частей; съ другой стороны, чѣмъ болѣе толстую проволоку мы беремъ, тѣмъ труднѣе ее укрѣпить на достаточной высотѣ, особенно во время бури и непогоды. Такъ что и здѣсь нѣтъ возможности безконечнаго усовершенствованія.

Я надѣюсь, что вышеприведенные доводы могутъ служить убѣдительнымъ доказательствомъ того, что единственный путь для усовершенствованія безпроволочнаго телеграфа — это увели-



Къ статьѣ проф. **A. Slaby.**

ченіе электрическаго напряженія. То, чѣмъ мы пользуемся въ настоящее время, то, что я показывалъ вамъ здѣсь, представляетъ собою чрезвычайно ничтожное пріобрѣтеніе по сравненію съ тѣмъ, что сдѣлалъ далеко отсюда, по ту сторону океана изслѣдователь, уединившійся на высоты Rocky Mountains у истоковъ рѣки Колорадо,—*Nikola Tesla*. Этотъ изобрѣтатель показываетъ результаты своихъ изслѣдованій лишь немногимъ посвященнымъ, и я лично не видѣлъ его опытовъ; я сообщаю о нихъ на основаніи нѣсколькихъ фотографій—любезно присланныхъ мнѣ на дняхъ. На одной изъ нихъ (см. таблицу) вы видите *Tesla* въ его уединенномъ баракѣ; искры искусственнаго разряда проскакиваютъ между его аппаратами, оставляя въ тѣни все, о чемъ мы смѣли когда-либо мечтать. Если-бы *Tesla* пожелалъ примѣнить свои теоретическія знанія и техническое умѣніе къ дѣлу практической безпроволочной телеграфіи, то мы бы пережили новый переворотъ въ техникѣ, который могъ бы сравниться даже съ тѣмъ, который явился результатомъ геніальнаго изобрѣтенія *Marconi*.

Tesla упрекаютъ за то, что онъ до сихъ поръ не примѣнилъ своихъ изслѣдованій на практикѣ; многіе даже сомнѣваются въ реальности его успѣховъ, основываясь на томъ, что *Tesla* черезъ посредство прессы нѣсколько разъ сообщалъ о самыхъ фантастическихъ планахъ. Но предъ чудеснымъ явленіемъ, открывшемся намъ въ таинственномъ дѣйствіи электрической искры, невольно становишься поэтомъ. Даже столь серьезный ученый, какъ проф. *Ayrton* такимъ образомъ грезитъ о будущемъ: „Настанетъ нѣкогда день, когда исчезнетъ память о насъ всѣхъ, когда мѣдныя проволоки, гуттаперчевые изоляторы и желѣзные проводы будутъ сохраняться лишь въ музеяхъ; тогда человѣкъ, желающій говорить съ своимъ другомъ и не знающій гдѣ онъ находится, будетъ звать его электрическимъ голосомъ, который услышитъ только тотъ, кто обладаетъ одинаково настроеннымъ электрическимъ ухомъ. Человѣкъ закричитъ: Гдѣ ты? — и другъ отвѣтитъ ему: я въ глубинѣ рудника, на вершинѣ Андовъ или на далекомъ океанѣ—. Или можетъ быть не получится никакого отвѣта и человѣкъ знаетъ тогда, что его другъ умеръ". — Я позволю себѣ закончить слѣдующими словами: наука же останется безсмертной и вѣчно юной и столѣтіе за столѣтіемъ будетъ черпать драгоцѣнныя сокровища изъ неизсякаемаго источника природы.

Этюды по основаніямъ геометріи.

Привать-Доцента В. Кагана въ Одессѣ.

---

*(Продолженіе *).*

§ 10. Еще въ 1895 г. С. О. Шатуновскій сообщилъ Математическому Отдѣленію Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей свою работу „О теоріи площадей прямолинейныхъ фигуръ". Къ сожалѣнію, работа эта не была опубликована и только въ 1898 г. остальныя ея положенія были напечатаны въ Дневникѣ X Съѣзда Естествоиспытателей и Врачей, во время котораго она была сообщена Математической секціи. Позже въ книгѣ Hilbert'а были изложены тѣ-же идеи. Къ изложенію этой постановки вопроса мы теперь переходимъ.

Теорема I. *Во всякомъ треугольникѣ произведеніе изъ основанія на высоту есть постояннная величина; иными словами, если a, b, c суть стороны треугольника h_a, h_b, h_c соотвѣтствующія имъ высоты, то*

$$a.h_a = b.h_b = c.h_c.$$

Доказательство. Изъ вершинъ A, B и C треугольника ABC опустимъ перпендикуляры AA', BB', CC' на противоположныя стороны. Въ данномъ случаѣ

$$a = BC,\ b = AC,\ c = AB,\ h_a = AA',\ h_b = BB',\ h_c = CC'.$$

Изъ подобія треугольниковъ $A'AC$ и $B'BC$ мы находимъ, что $BC.AA' = AC\ .BB'$. Такимъ же образомъ изъ подобія треугольниковъ $C'CA$ и $B'BA$ находимъ, что $AB.CC' = AC.BB'$. Такимъ образомъ теорема доказана.

Опредѣленіе. Во всякомъ треугольникѣ г. Шатуновскій называетъ постоянное произведеніе изъ основанія на высоту, умноженное на нѣкоторое постоянное, положительное число μ *инваріантомъ треугольника;* множитель μ мы будемъ называть коэффиціентомъ инваріанта. Инваріантъ треугольника ABC мы будемъ обозначать символомъ $J(ABC)$. Итакъ $J(ABC) = \mu.AB.CC'$.

Вся теорія площадей опирается на слѣдующую основную теорему:

Теорема II. *Если треугольникъ какимъ либо способомъ разбитъ на треугольники, то инваріантъ этого треугольника равенъ суммѣ инваріантовъ всѣхъ составляющихъ треугольниковъ.*

Доказательство этого предложенія не можетъ быть проведено сразу, мы разсмотримъ отдѣльно слѣдующіе случаи.

---

*) См. № 311 „Вѣстника".

1 случай. Данный треугольникъ ABC разбитъ на составляющіе треугольники прямыми, выходящими изъ одной и той-же вершины C.

Положимъ, что это дѣленіе производятъ прямыя CA_1, CA_2, $CA_3 \ldots. CA_{n-1}$.

Обозначимъ высоту h_c черезъ h, а отрѣзки AA_1, A_1A_2, $A_2A_3 \ldots. A_{n-1}B$ черезъ c_1, c_2, $c_3 \ldots. c_n$, такъ что

$$AB=c=c_1+c_2+c_3+\ldots.+c_n;$$

поэтому

$$J(ABC)=\mu.c.h=\mu(c_1+c_2+c_3+\ldots.+c_n)h=\mu.c_1.h+\mu.c_2.h+\ldots.+\mu.c_n.h.$$

Съ другой стороны

$$J(ACA_1)=\mu.c_1.h,\ J(A_1CA_2)=\mu c_2.h \ldots. J(A_{n-1}CB)=\mu.c_n.h,$$

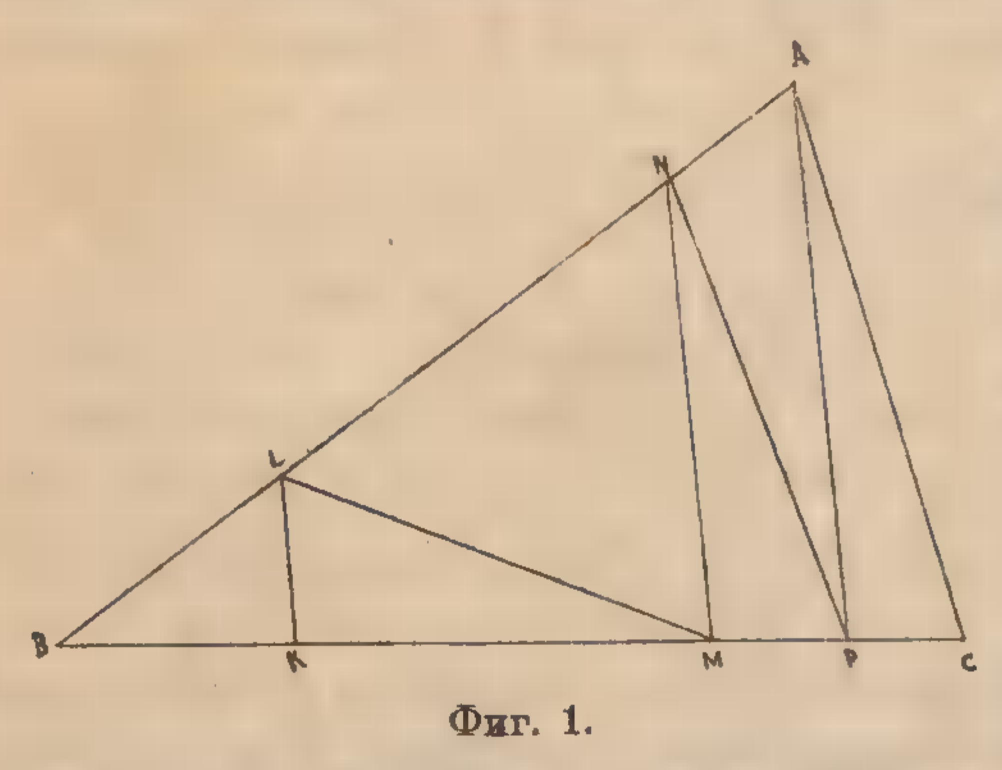
принимая это во вниманіе, мы можемъ представить предыдущее равенство въ такомъ видѣ:

$$J(ABC)=J(ACA_1)+J(A_1CA_2)+J(A_2CA_3)+\ldots.+J(A_{n-1}CB).$$

Такимъ образомъ для этого случая теорема доказана.

2 случай. Вершины составляющихъ треугольниковъ расположены исключительно на двухъ сторонахъ даннаго треугольника. Такой случай изображенъ на фигурѣ 1. Всѣ вершины составляющихъ треугольниковъ расположены здѣсь на сторонахъ AB и BC треугольника ABC.

Доказательство теоремы мы проведемъ для этого случая индуктивно по отношенію къ числу составляющихъ треугольниковъ. Прежде всего ясно, что теорема справедлива, когда этихъ составляющихъ треугольниковъ имѣется только два. Въ самомъ дѣлѣ, если на сторонѣ BC лежитъ вершина P составляющаго треугольника, то сторона выходящая изъ этой вершины неизбѣжно должна пройти черезъ вершину A треугольника ABC, — ибо въ противномъ случаѣ она отсѣкала бы не треугольникъ, а четыреугольникъ. Поэтому мы можемъ сказать что треугольникъ ABC раздѣленъ на два треугольника прямой, выходящей изъ его вершины. Итакъ, если имѣется только два составляющихъ треугольника, то разсматриваемый случай подходитъ подъ предыдущій—и стало быть теорема справедлива.



Фиг. 1.

Допустимъ теперь, что теорема справедлива (для разсматри-

ваемаго случая), когда число составляющихъ треугольниковъ есть n. Покажемъ, что она остается справедливой, когда число составляющихъ треугольниковъ есть $(n+1)$.

Итакъ, допустимъ, что треугольникъ ABC на фиг. 1 состоитъ изъ $(n+1)$ составляющихъ треугольниковъ, вершины которыхъ расположены на прямыхъ AB и CB.

Легко видѣть, что по крайней мѣрѣ черезъ одну изъ двухъ вершинъ A или C должна проходить сѣкущая, отсѣкающая составляющій треугольникъ. Въ самомъ дѣлѣ, въ противномъ случаѣ, черезъ точку P, представляющую собой вершину составляющаго треугольника, ближайшую къ точкѣ A, проходила бы сѣкущая, отсѣкающая четыреугольникъ, а не треугольникъ. Итакъ допустимъ, что прямая, отсѣкающая треугольникъ, выходитъ изъ вершины A. Можетъ случиться, что имѣется нѣсколько сѣкущихъ, выходящихъ изъ вершины A; но во всякомъ случаѣ имѣется только одна сѣкущая AP, отсѣкающая отъ треугольника ABC только *одинъ* составляющій треугольникъ APC.

Итакъ треугольникъ ABC дѣлится на два треугольника BAP и CAP, прямой AP, выходящей изъ его вершины. Поэтому

$$J(ABC) = J(BAP) + J(PAC).$$

Но треугольникъ ABP разбитъ на n составляющихъ треугольниковъ такимъ образомъ, что ихъ вершины лежатъ на двухъ сторонахъ треугольника BA и BP; поэтому, согласно допущенію

$$J(BAP) = J(BKL) + J(KLM) \ldots\ldots + J(NPA).$$

Подставляя это выраженіе въ предыдущее равенство, получимъ окончательно

$$J(ABC) = J(BKL) + J(KLM) \;.\;.\;.\;. + J(NPA) + J(APC).$$

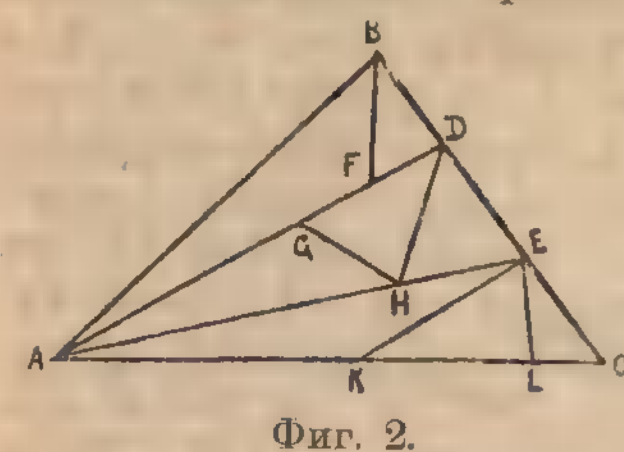
Теорема такимъ образомъ доказана и для этого случая.

3-й случай. Чтобы удобнѣе охарактеризовать этотъ случай, будемъ называть *трансверсалью* треугольника прямолинейный отрѣзокъ, начинающійся въ одной изъ вершинъ треугольника и окачивающійся на одной изъ его сторонъ. Такимъ образомъ и самыя стороны треугольника могутъ быть разсматриваемы, какъ трансверсали его.

Если треугольникъ разбитъ на составляющіе треугольники, то стороны этихъ составляющихъ треугольниковъ могутъ иногда образовать трансверсаль; такъ напр. на фигурѣ 2-ой стороны AG и GD образуютъ трансверсаль AD, стороны AH и HE образуютъ трансверсаль AE.

3-й случай, который мы имѣемъ въ виду теперь разсмотрѣть, характеризуется тѣмъ, что всѣ вершины составляющихъ треугольниковъ расположены на трансверсаляхъ, выходящихъ изъ одной и той-же

вершины даннаго треугольника. Такой случай изображенъ на фигурѣ 2. Всѣ вершины соотвѣтствующихъ треугольниковъ расположены здѣсь на трансверсаляхъ AB, AD, AE, AC.



Фиг. 2.

Треугольникъ ABC разбитъ въ данномъ случаѣ на составляющіе треугольники BAD, DAE, EAC прямыми, выходящими изъ вершины A. Поэтому (1-й случай)

$$J(ABC) = J(ABD) + J(DAE) + J(EAC).$$

Съ другой стороны, каждый изъ треугольниковъ BAD, DAE и EAC разбитъ на составляющіе треугольники такимъ образомъ, что вершины составляющихъ треугольниковъ лежатъ на двухъ сторонахъ того треугольника, который онѣ образуютъ. Поэтому (2-й случай)

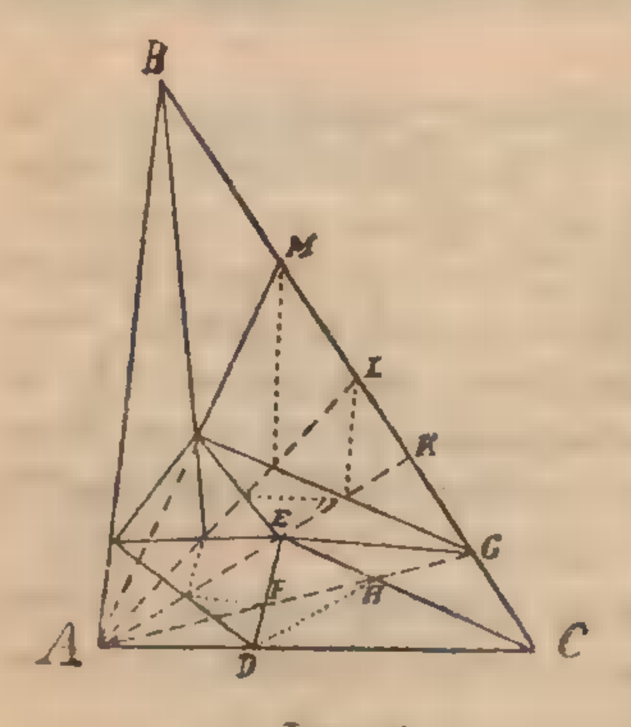
$$J(ABD) = J(ABF) + J(FBD)$$
$$J(DAE) = J(GAH) + J(GHD) + J(DHE)$$
$$J(AEC) = J(AEK) + J(KEL) + J(LEC).$$

Подставляя это въ предыдущее равенство, мы получимъ

$$J(ABC) = J(ABF) + J(FBD) + J(AGH) + J(GHD) + J(DHE) +$$
$$+ J(AEK) + J(KEL) + J(LEC).$$

Теорема доказана и для этого случая. Мы оперировали, правда, надъ опредѣленнымъ разложеніемъ треугольника, изображеннымъ на фиг. 2, но читателю несомнѣнно ясно, что наши разсужденія имѣютъ вполнѣ общій характеръ.

4-й случай. *Составляющіе треугольники расположены совершенно произвольно.* На фиг. 3, служащей для иллюстраціи этого случая, стороны составляющихъ треугольниковъ, на которые разложенъ треугольникъ ABC вычерчены сплошными линіями.



Фиг. 3.

Если бы всѣ вершины составляющихъ треугольниковъ были расположены на трансверсаляхъ, выходящихъ изъ одной и той-же вершины A, то мы имѣли бы дѣло съ предыдущимъ случаемъ. Мы предположимъ поэтому, что имѣются вершины составляющихъ треугольниковъ, не лежащія на трансверсали, выходящей изъ вершины A. Пусть G будетъ такая вершина. Проведемъ изъ вершины A трансверсаль, проходящую черезъ вершину G составляющаго треугольника EGC. Эта трансверсаль можетъ дѣлить составляющіе треугольники, по которымъ она про-

ходитъ, либо на два треугольника, либо на треугольникъ и четыреугольникъ,—смотря по тому, проходитъ ли она черезъ вершину составляющаго треугольника или нѣтъ. Такъ трансверсаль *AG* дѣлитъ треугольникъ *EGC* на треугольники *EGH* и *CGH*, а треугольникъ *DEC* на треугольникъ *EFH* и четыреугольникъ *DFHC*. Если трансверсаль отсѣкаетъ отъ какого либо составляющаго треугольника четыреугольникъ, то мы проведемъ въ немъ діагональ и такимъ образомъ разобьемъ четыреугольникъ на два треугольника, а составляющій треугольникъ на три треугольника. Въ нашемъ случаѣ четыреугольникъ *DFHC* разбивается діагональю *DH* на два треугольника *DFH* и *DHC*, а составляющій треугольникъ *EDC* разбивается на треугольники *EFH*, *DFH* и *DHC*.

Итакъ, если мы проведемъ трансверсаль *AG* и во всѣхъ четыреугольникахъ, которые она отсѣкаетъ отъ составляющихъ треугольниковъ проведемъ діагонали, то мы произведемъ новое разложеніе даннаго треугольника на составляющіе въ томъ смыслѣ, что нѣкоторые изъ составляющихъ треугольниковъ разобьются на два, другіе на три треугольника. Мы покажемъ однако, что сумма инваріантовъ составляющихъ треугольниковъ при этомъ остается та-же. Въ самомъ дѣлѣ, если какой либо треугольникъ разбивается на два новыхъ треугольника, то это производится прямой, проходящей черезъ вершину его; а потому сумма инваріантовъ этихъ двухъ треугольниковъ равна инваріанту всего треугольника (1-й случай). Если составляющій треугольникъ разбивается на три треугольника, то вершины послѣднихъ лежатъ на двухъ сторонахъ этого треугольника (именно на тѣхъ, которыя пересѣкаетъ трансверсаль; въ данномъ случаѣ треугольникъ *DEC* разбивается на три треугольника, вершины которыхъ лежатъ на сторонахъ *ED* и *EC*). Поэтому и здѣсь сумма инваріантовъ трехъ треугольниковъ равна инваріанту всего треугольника (2-й случай).

Посмотримъ теперь, каковъ результатъ произведенаго нами построенія.

Число составляющихъ туеугольниковъ увеличилось, но сумма ихъ инваріантовъ осталась та-же. Вершины новыхъ треугольниковъ либо совпадаютъ съ вершинами прежнихъ треугольниковъ, либо лежатъ на нашей трансверсали. Поэтому въ результатѣ нашего построенія не появлялось ни одной новой вершины, черезъ которую не проходитъ трансверсаль (изъ вершины *A*); но черезъ вершину *G*, черезъ которую транверсаль раньше не проходила,—теперь таковая проходитъ. Итакъ наше построеніе даетъ слѣдующій результатъ:

Число составляющихъ треугольниковъ увеличилось; сумма ихъ инваріантовъ осталась та-же; число вершинъ, черезъ которыя трансверсаль не проходитъ уменьшилось.

Возьмемъ теперь новую вершину, черезъ которую не проходитъ трансверсаль, проведемъ черезъ нее таковую и сдѣлаемъ

соотвѣтствующее построеніе. Мы вновь увеличимъ число составляющихъ треугольниковъ, сохранимъ ту-же сумму инваріантовъ и уменьшимъ число вершинъ, не лежащихъ на трансверсали.

Продолжая этотъ рядъ построеній, мы получимъ такое разложеніе, которое имѣетъ первоначальную сумму ниваріантовъ, а всѣ вершины составляющихъ треугольниковъ расположены на трансверсаляхъ. Это подходитъ подъ 3-й случай, а потому сумма инваріантовъ составляющихъ треугольниковъ равна инваріанту всего треугольника.

На нашемъ чертежѣ составляющіе треугольники первоначальнаго разложенія, какъ мы уже говорили, вычерчены сплошными линіями. Прерывными линіями вычерчены проведенныя нами послѣдовательно трансверсали; пунктирами обозначены діагонали, которыми дополнялось разложеніе.

Теорема III. *Если мы какую бы то ни было прямолинейную фигуру разобьемъ на треугольники, то послѣдніе будутъ имѣть одну и ту-же сумму инваріантовъ какимъ бы способомъ мы ни производили разложеніе нашихъ фигуръ на треугольники.*

Доказательство. Пусть P будетъ примолинейная фигура, о которой идетъ рѣчь. Разобьемъ ее на треугольники двумя способами, которые мы обозначимъ литерами S_1 и S_2. Пусть J_1 и J_2 будутъ суммы инваріантовъ составляющихъ треугольниковъ, соотвѣтствующія разложеніямъ S_1 и S_2. Построимъ теперь произвольный треугольникъ Δ такимъ образомъ, чтобы многоугольникъ P находился весь внутри треугольника Δ. Площадь содержащуюся между периферіей многоугольника и треугольника, разобьемъ на треугольники. Способъ разложенія мы обозначимъ черезъ S, а сумму инваріантовъ составляющихъ треугольниковъ (опредѣляемыхъ разложеніемъ S), мы обозначимъ черезъ J. Легко видѣть, что разложенія S и S_1 разбиваютъ треугольникъ Δ на составляющіе треугольники, сумма инваріантовъ которыхъ равняется $J+J_1$; разложенія же S и S_2 разбиваютъ треугольникъ Δ на составляющіе треугольники, сумма инваріантовъ которыхъ равна $J+J_2$.

Согласно предыдущей теоремѣ какъ и $J+J_1$, такъ и $J+J_2$ равны ниваріанту треугоаьника Δ. Поэтому

$$J+J_1=J+J_2, \text{ а потому } J_1=J_2$$

что и требовалось доказать.

Опредѣленіе. *Согласно предыдущей теоремѣ каждой прямолинейной фигурѣ соотвѣтствуетъ опредѣленное число, равное суммѣ инваріантовъ треугольниковъ, на которые онъ можетъ быть разбитъ. Это число мы будемъ называть инваріантомъ прямолинейной фигуры.*

Теорема IV. *Если прямолинейная фигура какимъ либо способомъ разбивается на составляющія ее прямолинейныя фигуры, то ея инваріантъ равенъ суммѣ инваріантовъ составляющихъ фигуръ.*

Доказательство. Положимъ, что фигура P разбивается на

прямолинейныя фигуры P_1, P_2, P_3, ... P_n. Пусть J, J_1, J_2 .... J_n будутъ инваріанты соотвѣтствующихъ фигуръ. Каждую изъ составляющихъ фигуръ мы разобьемъ на треугольники. Тогда инваріантъ J_k равняется суммѣ инваріантовъ тѣхъ треугольниковъ, на которые разбита фигура P_k. Мы можемъ это выразить равенствомъ

$$J_k = \Sigma j^{(k)}.$$

Но при нашемъ разложеніи и вся фигура P разбивается на треугольники, при чемъ въ составъ фигуры P входятъ всѣ треугольники, на которые разбивается каждая фигура P_k

$$J = \Sigma j^{(1)} + \Sigma j^{(2)} + \ldots . \Sigma j^{(n)} = J_1 + J_2 + \ldots . J_n.$$

Теорема V. *Двѣ конгруэнтныя прямолинейныя фигуры имѣютъ одинаковые инваріанты.*

Доказательство. Положимъ, что двѣ прямолинейныя фигуры P_1 и P_2 конгруэнтны. Тогда онѣ могутъ быть разбиты на соотвѣтственные конгруэнтные треугольники. Конгруэнтнымъ треугольникамъ отвѣчаютъ одинаковые инваріанты, такъ какъ они имѣютъ равныя стороны и равныя высоты, а потому и суммы инваріантовъ соотвѣтствующихъ треугольниковъ будутъ равны.

§ 11. Теорія, развитая въ предыдущемъ параграфѣ показываетъ, что для прямолинейныхъ фигуръ, можетъ быть установлена система измѣренія площадей. Для этого достаточно отнести каждой прямолинейной фигурѣ ея инваріантъ. Согласно двумъ послѣднимъ теоремамъ конгруэнтнымъ фигурамъ будутъ при этомъ соотвѣтствовать равныя числа; фигурѣ-же, разбитой на нѣсколько составляющихъ фигуръ, соотвѣтствуетъ число, равное суммѣ чиселъ, отвѣчающихъ составляющимъ фигурамъ. Согласно опредѣленію, данному въ § 7-мъ, это и значитъ установить систему измѣренія фигуръ. Возможность этого процесса такимъ образомъ установлена и теоремы § 8-го не нуждаются болѣе въ томъ условіи, которое мы предпосылали ихъ формулировкѣ.

Устанавливая систему измѣренія площадей изложеннымъ выше способомъ, мы еще оставляемъ за собой нѣкоторый произволъ. Именно выраженіе инваріанта треугольника содержитъ нѣкоторый постоянный множитель μ. Этимъ множителемъ мы можемъ распорядиться такъ, чтобы число, отнесенное къ любой прямолинейной фигурѣ было равно единицѣ. Иными словами, площадь любой прямолинейной фигуры можетъ быть принята за единицу мѣры. Но возвращаясь къ теоріи, изложенной въ §§ 8—9 мы видимъ, что на этомъ произволъ уже кончается. Если мы выбрали фигуру, которой отнесено число 1, то система измѣренія площадей можетъ быть установлена только однимъ способомъ.

ЗАДАЧИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ.

Рѣшенія всѣхъ задачъ, предложенныхъ въ текущемъ семестрѣ, будутъ помѣщены въ слѣдующемъ семестрѣ.

№ 136 (4 сер.). Количества x, y, z удовлетворяютъ равенствамъ

$$(x+\sqrt{x^2+a^2})(y+\sqrt{y^2+b^2})=c^2,$$

$$z=x\sqrt{y^2+b^2}+y\sqrt{x^2+a^2}.$$

Вычислить z въ зависимости отъ a, b и c.

Е. Буницкій (Одесса).

№ 137 (4 сер.). Рѣшить уравненіе

$$\lg_{\sin x\cos x}\sin x \cdot \lg_{\sin x\cos x}\cos x=\frac{1}{4}.$$

І. Полонскій (Одесса).

№ 138 (4 сер.). Привести къ логариѳмическому виду выраженіе

$$\frac{1}{\csc^2 2x}+\csc^2(45^0+x)+\frac{1}{\sec^2 2x}+\sec^2(45^0+x)+\operatorname{tg}^2 2x.$$

І. Полонскій (Одесса).

№ 139 (4 сер.). Рѣшить систему уравненій:

$$x^2=y(z+a^2)$$

$$y^2=z(x+ab)$$

$$z^2=x(y+b^2).$$

Е. Григорьевъ (Казань).

№ 140 (4 сер.). Построить треугольникъ ABC, зная одинъ изъ его угловъ, противолежащую этому углу сторону и прилежащій къ этой сторонѣ отрѣзокъ, опредѣляемый на одной изъ неизвѣстныхъ сторонъ проведенной къ ней биссектрисой.

Заимств. изъ *Journal de Mathématiques élémentaires.*

№ 141 (4 сер.). Желѣзный цилиндръ длины l припаянъ поверхностью перпендикулярнаго сѣченія къ платиновому цилиндру такого же сѣченія длины l'. 1) Каково должно быть отношеніе $\frac{l}{l'}$ для того, чтобы спаянный изъ желѣза и платины цилиндръ оставался въ равновѣсіи, будучи погруженъ въ ртутную ванну? 2) Вычислить значенія l и l' по слѣдующимъ даннымъ: $l+l'=69$ милл., и плотности желѣза, платины и ртути равны соотвѣтственно 7,7, 21,5 13,6.

Заимств. изъ *Bacc. lettres-sciences, Marseille, mars 1901.*

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 10 (4 сер.). *Сколько литровъ водяного пара при температурѣ 100° и давленіи 76 см. надо сгустить въ 2 куб. метрахъ воды, чтобы повысить температуру этой воды съ 20° до 80°? Плотность водяного пара* $\frac{5}{8}$; *скрытая теплота его испаренія при 100° равна 537.*

При нормальныхъ условіяхъ 1 куб. см. воздуха вѣситъ 0,0013 грамма, а литръ воздуха, содержащій 1000 куб. см., вѣситъ 0,0013 килограмма. При температурѣ 100° и давленіи 76 см. литръ воздуха, принимая коэффиціентъ его расширенія равнымъ 0,0037, вѣситъ $\frac{0{,}0013}{1+0{,}0037.100}=\frac{0{,}0013}{1{,}37}$ килограммовъ, а литръ пара вѣситъ

$$\frac{0{,}0013.5}{1{,}37.8} \text{ килограмм.} \qquad (1).$$

Вѣсъ 2-хъ куб. метровъ воды, объемъ которыхъ содержитъ 2000000 куб. сантиметровъ, при 4° составляетъ 2000 килограммовъ; принимая плотность воды при 20° равной 0, 9983, найдемъ, что 2 куб. литра воды при 20° вѣсятъ

$$0{,}9983.2000 \text{ килограмм.} \qquad (2).$$

Пусть искомое число литровъ пара есть x; тогда вѣсъ этого пара есть (см. (1)) $\frac{0{,}0013.5}{1{,}37.8}x$ килограммовъ. Каждый килограммъ этого пара, сгущаясь и охлаждаясь до 80°, теряетъ 537+100—80=557 большихъ калорій, а каждый килограммъ воды, нагрѣваясь съ 20° до 80°, пріобрѣтаетъ 60 большихъ калорій. Поэтому (см. (2))

$$\frac{0{,}0013.5}{1{,}37.8}\cdot 557x=0{,}9983.2000.60,$$

откуда

$$x=362647 \text{ литровъ.}$$

Д. Дѣлковъ (Новочеркасскъ); *В. Макшъ* (Новочеркасскъ); *Н. Ильинъ* (Энсо).

№ 32 (4 сер.). *Въ двухъ окружностяхъ O и O′ проводятъ хорды AB и A′B′, оконечности которыхъ A и A′ лежатъ на линіи центровъ OO′, такъ, что*

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{m}{n}.$$

Найти геометрическое мѣсто точекъ пересѣченія перпендикуляровъ, опущенныхъ соотвѣтственно изъ центровъ O и O′ на хорды AB и A′B′.

Пусть M — точка пересѣченія перпендикуляровъ и пусть N и N' — средины хордъ AB и $A'B'$, въ которыхъ эти хорды пересѣкаются перпендикулярами OM и $O'M'$. Обозначимъ черезъ ML разстояніе точки M отъ линіи центровъ. Изъ паръ подобныхъ треугольниковъ OML и OAN, $O'ML$ и $O'A'N'$ имѣемъ:

$$\frac{OM}{ML}=\frac{OA}{AN},\quad \frac{O'M}{ML}=\frac{O'A'}{A'N'},$$

откуда

$$\frac{O'M}{O'M}=\frac{OB}{O'A'}\cdot\frac{A'N'}{AN}=\frac{OA}{O'A'}\cdot\frac{n}{m}=k,$$

гдѣ k – постоянная величина. Если $k=1$, искомое геометрическое мѣсто есть прямая, перпендикулярная къ отрѣзку OO' въ его срединѣ. Если $k\neq 1$, то искомое геометрическое мѣсто есть окружность, концы діаметра которой суть точки, дѣлящія отрѣзокъ OO' въ отношеніи k внутреннимъ и внѣшнимъ образомъ.

Б. Мерцаловъ (Орелъ).

№ 33 (4 сер.). *Опредѣлить длину мѣдной проволоки сѣченіемъ въ 2 кв. миллим., соединяющей полюсы баттареи изъ соединенныхъ послѣдовательно четырехъ элементовъ Даніеля, зная, что сила тока въ цѣпи равна 5 амперамъ. 2) Опредѣлить силу тока этой баттареи при томъ же внѣшнемъ сопротивленіи, но при параллельной группировкѣ элементовъ. Сопротивленіе 1 метра мѣдной проволоки сѣченіемъ въ 1 кв. миллим. = 0,018 ома; электродвижущая сила элемента Даніеля—1,07 вольта, его сопротивленіе – 0.1 ома.*

Увеличивъ вдвое площадь поперечнаго сѣченія проволоки, мы этимъ вдвое уменьшимъ ея сопротивленіе. Слѣдовательно сопротивленіе 1 метра проволоки сѣченіемъ въ 2 кв. мм. равно 0,009 ома. Пусть длина проволоки, соединяющей полюсы баттареи, равна x метровъ; тогда ея сопротивленіе равно $0{,}009x$ ома, а потому по формулѣ послѣдовательнаго соединенія имѣемъ:

$$5=\frac{1{,}07.4}{0{,}1.4+0{,}009x},$$

откуда $x=50\frac{2}{3}$ метра. Теперь по формулѣ параллельнаго соединенія сила тока J выражается формулой

$$J=\frac{0{,}17}{\frac{0{,}1}{4}+50\frac{2}{3}\cdot 0{,}009}=2{,}22 \text{ ампера.}$$

Н. Дьяковъ (ст. Персіяновка); *Н. С.* (Одесса).

№ 42 (4 сер.). *Данъ произвольный уголъ ABC. Изъ точки O, взятой на сторонѣ AB, опущенъ на сторону BC перпендикуляръ OD и изъ точки O радіусомъ OB описана окружность. Можно ли при помощи циркуля и линейки построить хорду Bx этой окружности, встрѣчающую прямую OD въ такой точкѣ y, что xy и OB равны между собою?*

Такъ какъ $OX=OB=xy$, то изъ равнобедреннаго треугольника Oxy имѣемъ

$$2\angle Oyx+\angle x=2d, \text{ или } 2\angle Oyx+\angle OBy=2d \qquad (1).$$

Изъ треугольниковъ же BOy и BOD имѣемъ

$$\angle OBy+\angle BOy=\angle Oyx, \quad \angle d-\angle ABC=\angle BOy.$$

Сложивъ почленно эти равенства, помноживъ полученное равенство на 2 и сложивъ результатъ съ равенствомъ (1), найдемъ:

$$3\angle OBy-2\angle ABC=0, \text{ откуда } \angle OBy=\frac{2}{3}\angle ABC, \text{ а потому}$$

$$\angle xBC=\frac{1}{3}\angle ABC,$$

т. е. построеніе хорды Bx приводится къ трисекціи произвольнаго угла ABC, невыполнимой при помощи циркуля и линейки. Слѣдовательно, хорду Bx нельзя построить помощью циркуля и линейки.

Н. С. (Одесса); *М. Поповъ* (Асхабадъ).

№ 48 (4 сер.). *Построить треугольникъ ABC по сторонѣ AB, углу A и отношенію m стороны BC къ медіанѣ, проведенной къ этой сторонѣ.*

Отложивъ на произвольной прямой отрѣзокъ AB, дѣлимъ его въ точкѣ D пополамъ. На прямой DB строимъ точки x и y, удовлетворяющія равенствамъ $\frac{Bx}{xD} = \frac{By}{yD} = m$ и на отрѣзкѣ xy строимъ, какъ на діаметрѣ, окружность, которая есть, какъ извѣстно, геометрическое мѣсто точекъ, разстоянія которыхъ отъ точекъ B и D находятся въ отношеніи $m:1$; по условію, вершина C должна лежать на этой окружности. Проведя черезъ точку A прямую подъ даннымъ угломъ A къ прямой AB, получаемъ въ случаѣ возможности задачи, вообще двѣ точки пересѣченія C_1 и C_2 этой прямой съ окружностью. Каждый изъ треугольниковъ ABC_1 и ABC_2 даетъ правильное рѣшеніе задачи.

Б. Мерцаловъ (Орелъ).

Дополнительный списокъ фамилій лицъ, приславшихъ правильныя рѣшенія задачъ XXV-го семестра:

№ 1—*Е. Теренько* (Полтава), *Гудковъ* (Свеаборгъ); № 2—*Е. Теренько* (Полтава); № 5—*Гудковъ* (Свеаборгъ), *Е. Теренько* (Полтава), *Орловъ* (Москва); № 9—*Д. Дьяковъ* (Персіяновка); № 11—*Ор. Ефремовъ* (Иваново-Вознесенскъ); № 13—*П. Полушкинъ* (Знаменка), *Гудковъ* (Свеаборгъ); № 14—*Д. Коварскій* (Двинскъ), *Ор. Ефремовъ* (Иваново-Вознесенскъ); № 16—*А. Черевковъ* (Новочеркасскъ); № 19—*Б. Мерцаловъ* (Орелъ), *Гудковъ* (Свеаборгъ); № 22—*Л. Гальперинъ* (Бердичевъ); № 23—*Гудковъ* (Свеаборгъ); № 27—*Д. Дьяковъ* (Персіяновка); № 28—*Г. Огановъ* (Эривань); № 37—*С. Кудинъ* (Москва); № 44—*В. Микшъ* (Новочеркасскъ); № 49—*М. Поповъ* (Асхабадъ); № 58—*Гудковъ* (Свеаборгъ); *Д. Коварскій* (Двинскъ), *П. Полушкинъ* (Знаменка); № 59—*Г. Огановъ* (Эривань) *NN*; № 60—*П. Полушкинъ* (Знаменка), *М. Поповъ* (Асхабадъ), *Д. Коварскій* (Двинскъ), *В. Чеботаревъ* (Казань), *Д. Дьяковъ* (Новочеркасскъ); № 61—*Г. Огановъ* (Эривань); № 62—*Л. Гальперинъ* (Бердичевъ), *М. Поповъ* (Асхабадъ), *Г. Огановъ* (Эривань); № 66—*В. Толстовъ* (Тамбовъ), *Д. Коварскій* (Двинскъ) *NN*; № 69—*В. Микшъ* (Новочеркасскъ).

ПОПРАВКА. Въ задачѣ **№ 55** (4 сер.) напечатано $\frac{3x^2 + px + q}{x + 1}$; слѣдуетъ читать $\frac{3x^2 + px + q}{x^2 + 1}$.



Редакторы: **В. А. Циммерманъ** и **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Дозволено цензурою, Одесса, 9-го Января 1902 г.

Типографія Бланкоиздательства М. Шпенцера, Ямская, д. № 64.